Contrôle : Complexes (interprétation géométrique) 1h30

1

1. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation (E) d'inconnue z :

$$z^2 - 8z + 64 = 0.$$

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O; \vec{u}, \vec{v}\right)$.

2. On considère les points A, B et C d'affixes respectives $a = 4 + 4\text{i}\sqrt{3}$, $b = 4 - 4\text{i}\sqrt{3}$ et $c = 8\text{i}$.

(a) Calculer le module et un argument du nombre a.

(b) Donner la forme exponentielle des nombres a et b.

(c) Montrer que les points A, B et C sont sur un même cercle de centre O dont on déterminera le rayon.

(d) Placer les points A, B et C dans le repère $\left(O; \vec{u}, \vec{v}\right)$.

Pour la suite de l'exercice, on pourra s'aider de la figure de la question **2. d.** complétée au fur et à mesure de l'avancement des questions.

3. On considère les points A′, B′ et C′ d'affixes respectives $a' = a\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{3}}$, $b' = b\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{3}}$ et $c' = c\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{3}}$.

(a) Montrer que $b' = 8$.

(b) Calculer le module et un argument du nombre a'.

Pour la suite on admet que $a' = -4 + 4\text{i}\sqrt{3}$ et $c' = -4\sqrt{3} + 4\text{i}$.

4. On admet que si M et N sont deux points du plan d'affixes respectives m et n alors le milieu I du segment $[MN]$ a pour affixe $\dfrac{m+n}{2}$ et la longueur MN est égale à $|n-m|$.

(a) On note r, s et t les affixes des milieux respectifs R, S et T des segments [A′B], [B′C] et [C′A].
Calculer r et s. On admet que $t = 2 - 2\sqrt{3} + \text{i}\left(2 + 2\sqrt{3}\right)$.

(b) Quelle conjecture peut-on faire quant à la nature du triangle RST ?
Justifier ce résultat.

2

Soit $\mathcal{D}$ la droite d'équation $y = -x + 2$ et M un point du plan complexe d'affixe z non nulle, de module ρ et d'argument θ.

1. Montrer que $M \in \mathcal{D}$ si, et seulement si, il existe $\rho \in \left[\sqrt{2}; +\infty\right[$ et $\theta \in \left]-\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right[$ tels que $\rho = \dfrac{\sqrt{2}}{\cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)}$.

2. (a) En remarquant que $\dfrac{\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{3}}}{\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{4}}} = \text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{12}}$ déterminer la valeur exacte de $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$.

(b) Soit H le projeté orthogonal de O sur $\mathcal{D}$. Déterminer les coordonnées du point A de $\mathcal{D}$ tel que $\left(\overrightarrow{AH}, \overrightarrow{AO}\right) = \dfrac{\pi}{3}\ (2\pi)$.