Contrôle : Complexes (interprétation géométrique) 1h30

1 correction

1. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation (E) d'inconnue z :

$$z^2 - 8z + 64 = 0.$$

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$.

2. On considère les points A, B et C d'affixes respectives $a = 4+4\text{i}\sqrt{3}$, $b = 4-4\text{i}\sqrt{3}$ et $c = 8\text{i}$.

(a) Calculer le module et un argument du nombre a.

(b) Donner la forme exponentielle des nombres a et b.

(c) Montrer que les points A, B et C sont sur un même cercle de centre O dont on déterminera le rayon.

(d) Placer les points A, B et C dans le repère $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$.

Pour la suite de l'exercice, on pourra s'aider de la figure de la question **2. d.** complétée au fur et à mesure de l'avancement des questions.

3. On considère les points A$'$, B$'$ et C$'$ d'affixes respectives $a' = a\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{3}}$, $b' = b\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{3}}$ et $c' = c\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{3}}$.

(a) Montrer que $b' = 8$.

(b) Calculer le module et un argument du nombre a'.

Pour la suite on admet que $a' = -4+4\text{i}\sqrt{3}$ et $c' = -4\sqrt{3}+4\text{i}$.

4. On admet que si M et N sont deux points du plan d'affixes respectives m et n alors le milieu I du segment $[MN]$ a pour affixe $\dfrac{m+n}{2}$ et la longueur MN est égale à $|n-m|$.

(a) On note r, s et t les affixes des milieux respectifs R, S et T des segments [A$'$B], [B$'$C] et [C$'$A].
Calculer r et s. On admet que $t = 2-2\sqrt{3}+\text{i}\left(2+2\sqrt{3}\right)$.

(b) Quelle conjecture peut-on faire quant à la nature du triangle RST ?
Justifier ce résultat.

2 correction

Soit $\mathcal{D}$ la droite d'équation $y = -x+2$ et M un point du plan complexe d'affixe z non nulle, de module ρ et d'argument θ.

1. Montrer que $M \in \mathcal{D}$ si, et seulement si, il existe $\rho \in \left[\sqrt{2}\,;+\infty\right[$ et $\theta \in \left]-\dfrac{\pi}{4}\,;\dfrac{3\pi}{4}\right[$ tels que $\rho = \dfrac{\sqrt{2}}{\cos\left(\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)}$.

2. (a) En remarquant que $\dfrac{\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{3}}}{\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{4}}} = \text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{12}}$ déterminer la valeur exacte de $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$.

(b) Soit H le projeté orthogonal de O sur $\mathcal{D}$. Déterminer les coordonnées du point A de $\mathcal{D}$ tel que $\left(\overrightarrow{AH},\overrightarrow{AO}\right) = \dfrac{\pi}{3}\ (2\pi)$.

Correction

1 énoncé

1. Soit l'équation $z^2-8z+64=0$.

$\Delta=64-4\times64=-3\times64<0$.

L'équation a deux solutions complexes conjuguées :

$z_1=\dfrac{8+\mathrm{i}\sqrt{3\times64}}{2}=\boxed{4+4\mathrm{i}\sqrt{3}}$ et $z_2=\overline{z_1}=\boxed{4-4\mathrm{i}\sqrt{3}}$.

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O\,;\,\vec{u}\,;\,\vec{v}\right)$.

2. On considère les points A, B et C d'affixes respectives $a=4+4\mathrm{i}\sqrt{3}$, $b=4-4\mathrm{i}\sqrt{3}$ et $c=8\mathrm{i}$. (figure à la fin de l'exercice)

(a) $|a|=|4+4\mathrm{i}\sqrt{3}|=4|1+\mathrm{i}\sqrt{3}|=4\times2=\boxed{8}$.

On en déduit $a=8\left(\dfrac{1}{2}+\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)=8\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$. Un argument de a est donc $\dfrac{\pi}{3}$.

(b) On a trouvé $a=8\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$ et $b=\overline{a}=8\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$.

(c) $|a|=8$; $|b|=\left|\overline{a}\right|=|a|=8$ et $|c|=|8\mathrm{i}|=8$. Les points A, B et C sont donc sur le cercle de centre 0 et de rayon 8.

(d) Voir figure en fin d'exercice.

3. On considère les points A′, B′ et C′ d'affixes respectives $a'=a\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$, $b'=b\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$ et $c'=c\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$.

(a) $b'=b\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}=8\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}\times\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}=\boxed{8}$.

(b) $|a'|=\left|a\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}\right|=|a|\times\left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}\right|=|a|=\boxed{8}$ car $\left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right|=1$ pour tout θ réel.

$\arg(a')=\arg\left(a\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}\right)=\arg(a)+\arg\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}\right)=\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{\pi}{3}=\boxed{\dfrac{2\pi}{3}}$

Pour la suite on admet que $a'=-4+4\mathrm{i}\sqrt{3}$ et $c'=-4\sqrt{3}+4\mathrm{i}$.

4. (a) On note r, s et t les affixes des milieux respectifs R, S et T des segments [A′B], [B′C] et [C′A].

On a : $r=\dfrac{a'+b}{2}=\dfrac{-4+4\mathrm{i}\sqrt{3}+4-4\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}=\boxed{0}$.

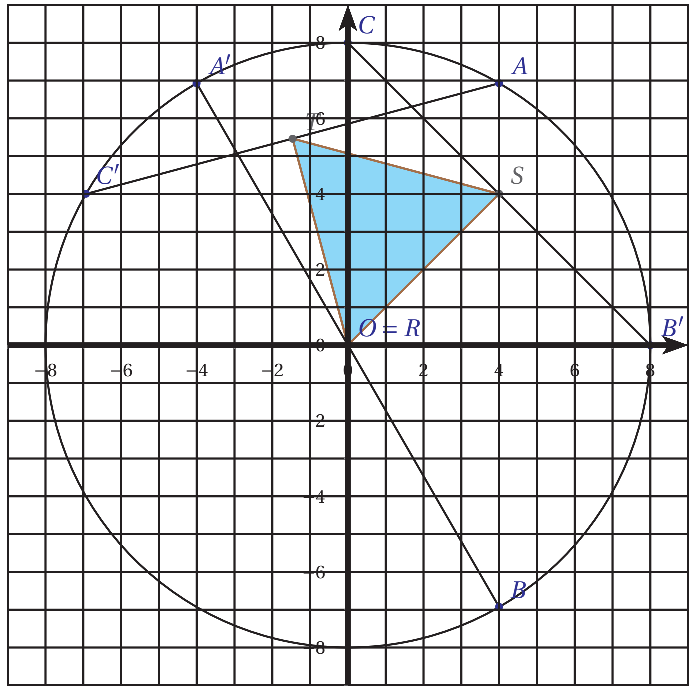
$s=\dfrac{b'+c}{2}=\dfrac{8+8\mathrm{i}}{2}=4+4\mathrm{i}$.

On a admis que $t=2-2\sqrt{3}+\mathrm{i}\left(2+2\sqrt{3}\right)$.

(b) Il semble que la figure que RST soit un triangle équilatéral.

- $RS=|s-r|=|4+4\mathrm{i}|=4|1+\mathrm{i}|=\boxed{4\sqrt{2}}$.
- $ST=|t-s|=\left|-2-2\sqrt{3}+\mathrm{i}\left(-2+2\sqrt{3}\right)\right|=2\left|-1-\sqrt{3}+\mathrm{i}\left(-1+\sqrt{3}\right)\right|$
  $=2\sqrt{\left(-1-\sqrt{3}\right)^2+\left(-1+\sqrt{3}\right)^2}=2\sqrt{\left(1+2\sqrt{3}+3+1-2\sqrt{3}+3\right)}=2\sqrt{8}$
  $=\boxed{4\sqrt{2}}$.
- $RT=|t-r|=\left|2-2\sqrt{3}+\mathrm{i}(2+2\sqrt{3})\right|$
  $=2\left|1-\sqrt{3}+\mathrm{i}(1+\sqrt{3})\right|=2\sqrt{1-2\sqrt{3}+3+1+2\sqrt{3}+3}=2\sqrt{8}$
  $=\boxed{4\sqrt{2}}$.

$RS=ST=RT=4\sqrt{2}$ donc le triangle RST est **équilatéral**.



2 énoncé

1. $z \neq 0$ donc il existe $\rho \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta \in]-\pi\,;\pi]$ tels que $z = \rho\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$.

$$\begin{aligned}
M(z) \in \mathcal{D} &\iff \rho\sin(\theta) = -\rho\cos(\theta) + 2\\
&\iff \rho(\sin(\theta)+\cos(\theta)) = 2\\
&\iff \frac{2}{\sqrt{2}}\rho\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin(\theta) + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos(\theta)\right) = 2\\
&\iff \rho\cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}
\end{aligned}$$

Comme $\theta \in]-\pi\,;\pi]$, on a $-\dfrac{5\pi}{4} < \theta - \dfrac{\pi}{4} \leqslant \dfrac{3\pi}{4}$.

D'autre part $\rho > 0$ et $\rho\cos\left(\theta - \dfrac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} > 0$, par conséquent $\cos\left(\theta - \dfrac{\pi}{4}\right) > 0$ et donc $-\dfrac{\pi}{2} < \theta - \dfrac{\pi}{4} < \dfrac{\pi}{2}$, c'est à dire $\theta \in \left]-\dfrac{\pi}{4}\,;\dfrac{3\pi}{4}\right[$.

Enfin, $0 < \cos\left(\theta - \dfrac{\pi}{4}\right) \leqslant 1$ et donc $\rho = \dfrac{\sqrt{2}}{\cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)} \geqslant \sqrt{2}$.

Réciproquement, si $\rho \geqslant \sqrt{2}$ et $\theta \in \left]-\dfrac{\pi}{4}\,;\dfrac{3\pi}{4}\right[$ vérifient $\rho\cos\left(\theta - \dfrac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$ alors $M\left(\rho\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right) \in \mathcal{D}$.

2. (a) $\mathrm{Re}\left(\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}}\right) = \mathrm{Re}\left(\dfrac{\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}}\right) = \mathrm{Re}\left(\left(\dfrac{1}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} - \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\right) = \dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4} = \cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$.

(b) Dans le triangle rectangle OAH la somme des angles vaut π, par conséquent $(\overrightarrow{OA}\,;\overrightarrow{OH}) = \dfrac{\pi}{12}\ (2\pi)$.

Ainsi $\arg(z_H) = \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{12} + \arg(z_A)\ (2\pi)$.

On en déduit que $\arg(z_A) = \dfrac{\pi}{6}$ et que $\rho = \dfrac{\sqrt{2}}{\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)}$, d'où $A\left(\dfrac{2\sqrt{6}}{\sqrt{2}+\sqrt{6}}, \dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}+\sqrt{6}}\right)$.