

Contrôle : corps des complexes

1 **correction**

Écrire sous forme algébrique :

1. $(5+i)(2-3i)$

2. $z = \frac{1}{2+3i}$

3. $z = \frac{2-5i}{2+i}$

4. $z = (4-5i)^2$

5. $z = \frac{1}{5+2i} - \frac{1}{5-2i}$

2 **correction**

Résoudre les équations suivantes et donner les solutions sous leur forme algébrique.

1. $iz = 5 - 8z$

3. $5z + 2\bar{z} = 1 - 2i$

2. $iz - 3 + 2i = (2-i)z + 5$

4. $(2-5i)\bar{z} = 2z + 3 + 2i$

3 **correction**

z est un nombre complexe. Précisez dans chacun des cas suivants si Z est réel, imaginaire pur ou ni l'un ni l'autre.

1. $Z = \left(\frac{z}{4-2i} + \frac{\bar{z}}{4+2i} \right) \left(\frac{z-\bar{z}}{z+\bar{z}} + (z^3 - \bar{z}^3)z\bar{z} \right)$

2. $Z = (1+2i)^{1000} + (-3-4i)^{500}$

4 **correction**

Résoudre les équations suivantes et donner les solutions sous leur forme algébrique.

1. $z^2 - 9 = 0$

3. $z^2 - 4z + 3 = 0$

2. $z^2 + 9 = 0$

4. $2z^2 - 2z + 4 = 0$

5 **correction**

Soit $P(z) = z^3 + (1+i)z^2 + (i-1)z - i$.

1. Déterminer le réel a tel que ai soit solution de l'équation $P(z) = 0$.

2. Factoriser $P(z)$ par $(z - ai)$.

3. Résoudre $P(z) = 0$.

6 **correction**

Soit $P(z) = iz^3 + (8-5i)z^2 + (-13-10i)z - 15 - 16i$.

Factoriser $P(z)$ par $(z - (2+3i))$.

Correction

1 énoncé

- $z = 13 - 13i$
- $z = \frac{2}{13} - \frac{3}{13}i$
- $z = -\frac{1}{5} - \frac{12}{5}i$

2 énoncé

- $S = \left\{ \frac{8}{13} - \frac{i}{13} \right\}$
- $S = \left\{ -\frac{5}{2} - \frac{3}{2}i \right\}$

3 énoncé

- $\bar{Z} = \overline{\left(\frac{z}{4-2i} + \frac{\bar{z}}{4+2i} \right) \left(\frac{z-\bar{z}}{z+\bar{z}} + (z^3 - \bar{z}^3) z\bar{z} \right)} = \left(\frac{z}{4-2i} + \frac{\bar{z}}{4+2i} \right) \left(-\frac{z-\bar{z}}{z+\bar{z}} - (z^3 - \bar{z}^3) z\bar{z} \right) = -Z$
 Z est donc un imaginaire pur.

- On a $(1+2i)^2 = -3+4i$ par conséquent,

$$Z = ((1+2i)^2)^{500} + (-3-4i)^{500} = (-3+4i)^{500} + (-3-4i)^{500} = (-3+4i)^{500} + \overline{(-3+4i)^{500}}.$$

Z est donc un réel.

4 énoncé

- $S = \{-3; 3\}$
- $S = \{-3i; 3i\}$
- $S = \{1; 3\}$
- $S = \left\{ \frac{1+i\sqrt{7}}{2}; \frac{1-i\sqrt{7}}{2} \right\}$

5 énoncé

- ai est solution de l'équation $P(z) = 0$ si, et seulement si, $P(ai) = 0$.

$$P(ai) = (ai)^3 + (1+i) \times (ai)^2 + (1-i) \times ai - i = -(a^2 - a) - (a^3 + a^2 + a + 1)i.$$

Ainsi, $P(ai) = 0$ équivaut à $a^2 + a = 0$ et $(\star) a^3 + a^2 + a + 1 = 0$.

$$a^2 + a = 0 \iff a = 0 \text{ ou } a = -1.$$

Or 0 n'est pas solution de (\star) alors que -1 l'est. La seule solution qui convient est donc $a = -1$.

- Par division (ou par identification), on a $P(z) = (z+i)(z^2 + z - 1)$.

$$3. S = \left\{ -i; \frac{-1-\sqrt{5}}{2}; \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \right\}.$$

6 énoncé

$$P(z) = (z - (2+3i))(iz^2 + (5-3i)z + 6-i).$$