Contrôle : nombres complexes (2h)

1

Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation :

$$z^5 = \sqrt{3} - \mathrm{i}.$$

2

Soient a et b deux complexes de module 1.

Montrer que, si $ab \neq -1$ alors : $Z = \dfrac{a+b}{1+ab} \in \mathbb{R}$.

3

Déterminer la forme exponentielle des nombres complexes suivants :

1. $z_1 = \left(\sqrt{6} + 3\sqrt{2}\mathrm{i}\right)^{12}$

2. $z_2 = -\sin(2\theta) + 2\mathrm{i}\cos^2(\theta)$

(a) Lorsque $\theta \in \left[-\dfrac{\pi}{2} ; \dfrac{\pi}{2}\right]$

(b) Lorsque $\theta \in \left[\dfrac{\pi}{2} ; \dfrac{3\pi}{2}\right]$

Rappel : $\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a) = 2\cos^2(a) - 1 = 1 - 2\sin^2(a)$

$\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a)$ et $\tan(2a) = \dfrac{2\tan(a)}{1-\tan^2(a)}$

4

On note $\alpha = \mathrm{e}^{\frac{2i\pi}{7}}$, $S = \alpha + \alpha^2 + \alpha^4$ et $T = \alpha^3 + \alpha^5 + \alpha^6$.

1. (a) Montrer que pour tout $k \in [\![0;6]\!]$, $\overline{\alpha^k} = \alpha^{7-k}$.

(b) En déduire que S et T sont conjugués.

2. On considère l'équation (E) : $z^7 = 1$.

(a) Montrer que la somme des solutions de l'équation (E) est nulle.

(b) En déduire les valeurs de $S+T$ et ST.

(c) On admet que $\mathrm{Im}(S) > 0$, déterminer les valeurs de S et T.

5

Soit n un entier naturel avec $n \geqslant 2$. On note ζ_k, $k \in [\![0; n-1]\!]$ les racines n-ième de l'unité. Déterminer la valeur de la somme :

$$|\zeta_0 - 1| + |\zeta_1 - 1| + \ldots + |\zeta_{n-1} - 1|.$$