Contrôle : nombres complexes (2h)

1 correction

Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation :

$$z^5 = \sqrt{3} - \mathrm{i}.$$

2 correction

Soient a et b deux complexes de module 1.

Montrer que, si $ab \neq -1$ alors : $Z = \dfrac{a+b}{1+ab} \in \mathbb{R}$.

3 correction

Déterminer la forme exponentielle des nombres complexes suivants :

1. $z_1 = \left(\sqrt{6} + 3\sqrt{2}\mathrm{i}\right)^{12}$

2. $z_2 = -\sin(2\theta) + 2\mathrm{i}\cos^2(\theta)$

(a) Lorsque $\theta \in \left[-\dfrac{\pi}{2}\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right]$

(b) Lorsque $\theta \in \left[\dfrac{\pi}{2}\,;\,\dfrac{3\pi}{2}\right]$

Rappel : $\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a) = 2\cos^2(a) - 1 = 1 - 2\sin^2(a)$
$\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a)$ et $\tan(2a) = \dfrac{2\tan(a)}{1-\tan^2(a)}$

4 correction

On note $\alpha = \mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{7}}$, $S = \alpha + \alpha^2 + \alpha^4$ et $T = \alpha^3 + \alpha^5 + \alpha^6$.

1. **(a)** Montrer que pour tout $k \in [\![0;6]\!]$, $\overline{\alpha^k} = \alpha^{7-k}$.

(b) En déduire que S et T sont conjugués.

2. On considère l'équation (E) : $z^7 = 1$.

(a) Montrer que la somme des solutions de l'équation (E) est nulle.

(b) En déduire les valeurs de $S+T$ et ST.

(c) On admet que $\mathrm{Im}(S) > 0$, déterminer les valeurs de S et T.

5 correction

Soit n un entier naturel avec $n \geqslant 2$. On note ζ_k, $k \in [\![0;n-1]\!]$ les racines n-ième de l'unité. Déterminer la valeur de la somme :

$$|\zeta_0 - 1| + |\zeta_2 - 1| + \ldots + |\zeta_{n-1} - 1|.$$

Correction

1 énoncé

$\sqrt{3}-\mathrm{i}=2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$.

$$\begin{aligned}
z^5=\sqrt{3}+\mathrm{i} &\iff z^5=2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}\\
&\iff z^5=\left(2^{\frac{1}{5}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{30}}\right)^5\\
&\iff \left(\frac{z}{2^{\frac{1}{5}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{30}}}\right)^5=1\\
&\iff \frac{z}{2^{\frac{1}{5}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{30}}}\in\left\{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2k\pi}{5}},\ k\in[\![0;4]\!]\right\}\\
&\iff z\in\left\{2^{\frac{1}{5}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(-\frac{\pi}{30}+\frac{2k\pi}{5}\right)},\ k\in[\![0;4]\!]\right\}
\end{aligned}$$

2 énoncé

Montrons que $\overline{Z}=Z$. Comme a et b sont de module 1, ils sont non-nuls et $\overline{a}=\dfrac{1}{a}$ et $\overline{b}=\dfrac{1}{b}$. Par conséquent,

$$\overline{Z}=\frac{\overline{a}+\overline{b}}{1+\overline{a}\overline{b}}=\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{1+\frac{1}{a}\frac{1}{b}}=\frac{a+b}{1+ab}=Z.$$

On en déduit que $Z\in\mathbb{R}$.

3 énoncé

1. $\left|\sqrt{6}+3\sqrt{2}\mathrm{i}\right|=2\sqrt{6}$, donc

$$\left(\sqrt{6}+3\sqrt{2}\mathrm{i}\right)^{12}=\left(2\sqrt{6}\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)\right)^{12}=\left(2\sqrt{6}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}\right)^{12}=2^{18}\times 3^6.$$

2. On a $z_2=-\sin(2\theta)+2\mathrm{i}\cos^2(\theta)=-2\sin(\theta)\cos(\theta)+2\mathrm{i}\cos^2(\theta)=2\mathrm{i}\cos(\theta)(\cos(\theta)+\mathrm{i}\sin(\theta))=2\mathrm{i}\cos(\theta)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$.

(a) Si $\theta\in\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ alors $\cos(\theta)>0$ et $z_2=2\cos(\theta)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$. La forme exponentielle de z_2 est :

$$z_2=2\cos(\theta)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)}.$$

(b) Si $\theta\in\left]\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right[$ alors $\cos(\theta)<0$ et $z_2=2(-\mathrm{i})(-\cos(\theta))\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}=-2\cos(\theta)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$. La forme exponentielle de z_2 est :

$$z_2=-2\cos(\theta)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)}.$$

4 énoncé

1. (a) Soit $k\in[\![0;6]\!]$.

$$\overline{\alpha^k}=\overline{\mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}k\pi}{7}}}=\mathrm{e}^{-\frac{2\mathrm{i}k\pi}{7}}=\mathrm{e}^{-\frac{2\mathrm{i}k\pi}{7}+2\mathrm{i}\pi}=\mathrm{e}^{\frac{2i(7-k)\pi}{7}}=\alpha^{7-k}.$$

(b) $\overline{S}=\overline{\alpha+\alpha^2+\alpha^4}=\overline{\alpha}+\overline{\alpha^2}+\overline{\alpha^4}=\alpha^6+\alpha^5+\alpha^3=T$.

2. (a) L'ensemble des solutions de (E) est $\left\{\alpha^k,\ k\in[\![0;6]\!]\right\}$, étant donné que $\alpha\neq 1$,

$$\sum_{k=0}^{6}\alpha^k=\frac{1-\alpha^7}{1-\alpha}=0.$$

(b)
- On en déduit que $1+S+T=0$, *i.e.* $S+T=-1$.
- $$\begin{aligned}
ST&=\left(\alpha+\alpha^2+\alpha^4\right)\left(\alpha^3+\alpha^5+\alpha^6\right)\\
&=\alpha^4+\alpha^6+\alpha^7+\alpha^5+\alpha^7+\alpha^8+\alpha^7+\alpha^9+\alpha^{10}\\
&=\alpha^4+\alpha^6+1+\alpha^5+1+\alpha+1+\alpha^2+\alpha^3\\
&=2
\end{aligned}$$

(c) S et T sont les racines du polynôme :

$$P=X^2-(S+T)X+ST=X^2+X+2$$

dont les racines sont

$$\frac{-1-\mathrm{i}\sqrt{7}}{2}\quad\text{et}\quad\frac{-1+\mathrm{i}\sqrt{7}}{2}.$$

$\sin\left(\frac{8\pi}{7}\right)=-\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$ et comme la fonction $\sin$ est croissante sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$, $\sin\left(\frac{\pi}{7}\right)\leqslant\sin\left(\frac{2\pi}{7}\right)$ *i.e.* $\sin\left(\frac{2\pi}{7}\right)+\sin\left(\frac{8\pi}{7}\right)\geqslant 0$. On en déduit que $\mathrm{Im}(S)\geqslant 0$ et par conséquent :

$$S=\frac{-1+\mathrm{i}\sqrt{7}}{2}\quad\text{et}\quad T=\frac{-1-\mathrm{i}\sqrt{7}}{2}.$$

5 énoncé

$$\begin{aligned}\zeta_k - 1 &= e^{\frac{i2k\pi}{n}} - 1\\ &= e^{\frac{ik\pi}{n}}\left(e^{\frac{ik\pi}{n}} - e^{-\frac{ik\pi}{n}}\right)\\ &= e^{\frac{ik\pi}{n}} 2i\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n-1}|\zeta_k - 1| &= \sum_{k=1}^{n-1} 2\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) \quad (k=1 \text{ car } \zeta_0 = 1)\\ &= 2\,\mathrm{Im}\left(\sum_{k=1}^{n-1} e^{\frac{ik\pi}{n}}\right)\\ &= 2\,\mathrm{Im}\left(e^{\frac{i\pi}{n}}\sum_{k=1}^{n-1}\left(e^{\frac{i\pi}{n}}\right)^{k-1}\right)\\ &= 2\,\mathrm{Im}\left(e^{\frac{i\pi}{n}}\frac{1-e^{\frac{i(n-1)\pi}{n}}}{1-e^{\frac{i\pi}{n}}}\right)\\ &= 2\,\mathrm{Im}\left(e^{\frac{i\pi}{n}}\frac{1+e^{-\frac{i\pi}{n}}}{1-e^{\frac{i\pi}{n}}}\right)\\ &= 2\,\mathrm{Im}\left(e^{\frac{i\pi}{n}}\frac{e^{-\frac{i\pi}{2n}}\left(e^{\frac{i\pi}{2n}}+e^{-\frac{i\pi}{2n}}\right)}{e^{\frac{i\pi}{2n}}\left(e^{-\frac{i\pi}{2n}}-e^{\frac{i\pi}{2n}}\right)}\right)\\ &= 2\,\mathrm{Im}\left(e^{\frac{i\pi}{n}}e^{-\frac{i\pi}{n}}\frac{2\cos\left(\frac{\pi}{2n}\right)}{-2i\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)}\right)\\ &= 2\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2n}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)}\end{aligned}$$