

## Contrôle : interprétation géométrique des complexes

1

Le plan  $\mathcal{P}$  est rapporté au repère orthonormal direct  $(O; \vec{u}, \vec{v})$ , (unité graphique 2 cm).  
On considère les points I et A d'affixe respectives 1 et  $-2$ . Le point K est le milieu du segment [IA].  
On appelle  $(\mathcal{C})$  le cercle de diamètre [IA]. Faire une figure et la compléter au fur et à mesure.

1. Soit B le point d'affixe  $b = \frac{1+4i}{1-2i}$ . Écrire  $b$  sous forme algébrique et montrer que B appartient au cercle  $(\mathcal{C})$ .

2. Soit D le point du cercle  $(\mathcal{C})$  tel que l'angle  $(\vec{KI}, \vec{KD}) = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$  où  $k$  est un entier relatif et soit  $d$  l'affixe de D.

(a) Déterminer  $\arg\left(\frac{d-z_K}{z_I-z_K}\right)$ .

(b) Déterminer  $\left|\frac{d-z_K}{z_I-z_K}\right|$ .

(c) En déduire que  $d = \frac{1}{4} + 3i\frac{\sqrt{3}}{4}$ .

3. Déterminer un réel  $a$  vérifiant l'égalité  $\frac{1+2ia}{1-ia} = \frac{1}{4} + 3i\frac{\sqrt{3}}{4}$ .

4. Soit  $x$  un réel non nul et  $M$  le point d'affixe  $m = \frac{1+2ix}{1-ix}$ . On pose  $Z = \frac{(m-1)}{(m+2)}$ . Calculer  $Z$  et en déduire la nature du triangle AIM.

5. Soit  $N$  un point, différent de A du cercle  $(\mathcal{C})$  et  $n$  son affixe.

Démontrer qu'il existe un réel  $y$  tel que  $n = \frac{1+2iy}{1-iy}$ .

2

Résoudre dans  $\mathbb{C}$ , pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , l'équation :

$$z^n = 1 - i\sqrt{3}.$$

3

Soit  $r$  un réel strictement positif et  $\alpha$  un réel de l'intervalle  $]-\pi; \pi]$ . On note  $z_1$  et  $z_2$  les solutions de l'équation

$$z^2 - 2r \cos(\alpha)z + r^2 = 0.$$

Montrer que

$$z_1^n + z_2^n = 2r^n \cos(n\alpha).$$

4

Soit  $a$  un réel et  $(E)$  l'équation dans  $\mathbb{C}$  :

$$\left(\frac{z-i}{z+i}\right)^n = \frac{1+ia}{1-ia}.$$

1. (a) Montrer que si  $z$  est solution de  $(E)$ , on a  $\left|\frac{z-i}{z+i}\right| = 1$ .

(b) En déduire que toutes les solutions de  $(E)$  sont réelles.

2. Résoudre  $(E)$  dans le cas où  $a = 1$ .