

Contrôle : interprétation géométrique des complexes

1 correction

Le plan \mathcal{P} est rapporté au repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$, (unité graphique 2 cm).
On considère les points I et A d'affixe respectives 1 et -2 . Le point K est le milieu du segment [IA].
On appelle (\mathcal{C}) le cercle de diamètre [IA]. Faire une figure et la compléter au fur et à mesure.

1. Soit B le point d'affixe $b = \frac{1+4i}{1-2i}$. Écrire b sous forme algébrique et montrer que B appartient au cercle (\mathcal{C}) .

2. Soit D le point du cercle (\mathcal{C}) tel que l'angle $(\vec{KI}, \vec{KD}) = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ où k est un entier relatif et soit d l'affixe de D.

(a) Déterminer $\arg\left(\frac{d-z_K}{z_I-z_K}\right)$.

(b) Déterminer $\left|\frac{d-z_K}{z_I-z_K}\right|$.

(c) En déduire que $d = \frac{1}{4} + 3i\frac{\sqrt{3}}{4}$.

3. Déterminer un réel a vérifiant l'égalité $\frac{1+2ia}{1-ia} = \frac{1}{4} + 3i\frac{\sqrt{3}}{4}$.

4. Soit x un réel non nul et M le point d'affixe $m = \frac{1+2ix}{1-ix}$. On pose $Z = \frac{(m-1)}{(m+2)}$. Calculer Z et en déduire la nature du triangle AIM.

5. Soit N un point, différent de A du cercle (\mathcal{C}) et n son affixe.

Démontrer qu'il existe un réel y tel que $n = \frac{1+2iy}{1-iy}$.

2 correction

Résoudre dans \mathbb{C} , pour $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation :

$$z^n = 1 - i\sqrt{3}.$$

3 correction

Soit r un réel strictement positif et α un réel de l'intervalle $]-\pi; \pi]$. On note z_1 et z_2 les solutions de l'équation

$$z^2 - 2r \cos(\alpha)z + r^2 = 0.$$

Montrer que

$$z_1^n + z_2^n = 2r^n \cos(n\alpha).$$

4 correction

Soit a un réel et (E) l'équation dans \mathbb{C} :

$$\left(\frac{z-i}{z+i}\right)^n = \frac{1+ia}{1-ia}.$$

1. (a) Montrer que si z est solution de (E) , on a $\left|\frac{z-i}{z+i}\right| = 1$.

(b) En déduire que toutes les solutions de (E) sont réelles.

2. Résoudre (E) dans le cas où $a = 1$.

Correction

1 énoncé

1. $b = \frac{1+4i}{1-2i} = \frac{(1+4i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)} = -\frac{7}{5} + \frac{6}{5}i.$

$b - \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{9}{10} + \frac{6}{5}i.$

$\left|b + \frac{1}{2}\right| = \sqrt{\left(-\frac{9}{10}\right)^2 + \left(\frac{6}{5}\right)^2} = \frac{3}{2}.$

(C) est le cercle de centre $K\left(-\frac{1}{2}\right)$ et de rayon $\frac{3}{2}$, comme $\left|b + \frac{1}{2}\right| = \frac{3}{2}$ on en déduit que B est sur (C).

2. (a)

$$\begin{aligned} \arg\left(\frac{d-z_k}{z_I-z_k}\right) &= \arg(d-z_k) - \arg(z_I-z_k) \quad (2\pi) \\ &= (\vec{u}; \overrightarrow{KD}) - (\vec{u}; \overrightarrow{KI}) \quad (2\pi) \\ &= (\overrightarrow{KI}; \overrightarrow{KD}) \quad (2\pi) \\ &= \frac{\pi}{3} \quad (2\pi) \end{aligned}$$

(b) $\left|\frac{d-z_K}{z_I-z_K}\right| = \frac{|d-z_K|}{|z_I-z_K|} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{3}{2}} = 1$

(c) D'une part, $\frac{d-z_K}{z_I-z_K} = \frac{3}{2}e^{i\frac{\pi}{3}} = \frac{3}{4} + \frac{3\sqrt{3}}{4}i$ et d'autre part, $\frac{d-z_K}{z_I-z_K} = \frac{d+\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}}$, on en déduit que

$d = \frac{1}{4} + \frac{3\sqrt{3}}{4}i.$

3. Montrons que $a = \frac{\sqrt{3}}{3}$ convient :

$$\frac{1+2i\frac{\sqrt{3}}{3}}{1-i\frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{\left(1+2i\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\left(1+i\frac{\sqrt{3}}{3}\right)}{1+\frac{1}{3}} = \frac{\frac{1}{3}+i\sqrt{3}}{\frac{4}{3}} = \frac{1}{4} + 3i\frac{\sqrt{3}}{4}.$$

4. $Z = \frac{\frac{1+2ix}{1-ix} - 1}{\frac{1+2ix}{1-ix} + 2} = \frac{1+2ix-1+ix}{1-ix} \times \frac{1-ix}{1+2ix+2-2ix} = ix.$

Z est donc un imaginaire pur, par conséquent $\arg(Z) = \frac{\pi}{2} (\pi)$. Mais $\arg(Z) = (\overrightarrow{AM}; \overrightarrow{IM})$ donc

$(\overrightarrow{MA}; \overrightarrow{MI}) = \frac{\pi}{2} (2\pi).$

Le triangle AIM est rectangle en M.

5. Si $N=I$ alors $n=1$ et $y=0$ convient.

Si $N \neq I$, alors le triangle INA est rectangle en N ($N \neq A$ d'après l'énoncé) car N est sur le cercle de diamètre [IA], $\frac{n-1}{n+2} \neq 0$ et $\arg\left(\frac{n-1}{n+2}\right) = \frac{\pi}{2} (\pi)$.

$\frac{n-1}{n+2}$ est donc un imaginaire pur, en notant y sa partie imaginaire on a :

$\frac{n-1}{n+2} = iy.$

or

$$\begin{aligned} \frac{n-1}{n+2} = iy \quad \underline{ssi} \quad n-1 &= iy(n+2) \\ \underline{ssi} \quad n-1-iy(n+2) &= 0 \\ \underline{ssi} \quad n(1-iy) &= 1+2iy \\ \underline{ssi} \quad n &= \frac{1+2iy}{1-iy} \end{aligned}$$

2 énoncé

$1+i\sqrt{3} = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}.$

$$\begin{aligned}
z^n = 1 + i\sqrt{3} &\iff z^n = 2e^{-i\frac{\pi}{3}} \\
&\iff z^n = \left(2^{\frac{1}{n}} e^{-i\frac{\pi}{3n}}\right)^n \\
&\iff \left(\frac{z}{2^{\frac{1}{n}} e^{-i\frac{\pi}{3n}}}\right)^n = 1 \\
&\iff \frac{z}{2^{\frac{1}{n}} e^{-i\frac{\pi}{3n}}} \in \left\{e^{i\frac{2k\pi}{n}}, k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket\right\} \\
&\iff z \in \left\{e^{i\left(-\frac{\pi}{3n} + \frac{2k\pi}{n}\right)}, k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket\right\}
\end{aligned}$$

3 énoncé

1. Le discriminant réduit est :

$$\Delta' = r^2 \cos^2(\alpha) - r^2 = (ir \sin(\alpha))^2.$$

Les solutions sont donc $z_1 = r \cos(\alpha) - ir \sin(\alpha) = r e^{-i\alpha}$ et $z_2 = r \cos(\alpha) + ir \sin(\alpha) = r e^{i\alpha}$.

On en déduit que

$$\begin{aligned}
z_1^n + z_2^n &= r^n e^{ina} + r^n e^{-ina} \\
&= 2r^n \cos(n\alpha)
\end{aligned}$$

4 énoncé

1. (a)

$$\begin{aligned}
\left(\frac{z-i}{z+i}\right)^n = \frac{1+ia}{1-ia} &\implies \left|\frac{z-i}{z+i}\right|^n = \left|\frac{1+ia}{1-ia}\right| \\
&\implies \left|\frac{z-i}{z+i}\right|^n = \frac{\sqrt{1+a^2}}{\sqrt{1+a^2}} \\
&\implies \left|\frac{z-i}{z+i}\right|^n = 1 \\
&\implies \left|\frac{z-i}{z+i}\right| = 1
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
\left|\frac{z-i}{z+i}\right| = 1 &\implies \left(\frac{z-i}{z+i}\right) \overline{\left(\frac{z-i}{z+i}\right)} = 1 \\
&\implies (z-i)(\bar{z}+i) = (z+i)(\bar{z}-i) \\
&\implies z - \bar{z} = 0 \\
&\implies z \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

2. Pour $a = 1$, $\frac{1+ia}{1-ia} = \frac{1+i}{1-i} = e^{i\frac{\pi}{2}}$.

Posons $Z = \frac{z-i}{z+i}$.

$$Z^n = e^{i\frac{\pi}{2}} \iff Z \in S = \left\{e^{i\left(\frac{\pi}{2n} + \frac{2k\pi}{n}\right)}, k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket\right\}.$$

Les solutions de (E) sont donc les solutions, éventuelles, des n équations d'inconnue z $Z_k = \frac{z-i}{z+i}$, $k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$ où les Z_k sont les éléments de S .

Soit $k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$. Résolvons l'équation $Z_k = \frac{z-i}{z+i}$.

$$\begin{aligned}
Z_k = \frac{z-i}{z+i} &\iff Z_k(z+i) = z-i \text{ et } z \neq -i \\
&\iff Z_k z + iZ_k - z = -i \text{ et } z \neq -i \\
&\iff z(Z_k - 1) = -i(Z_k + 1) \text{ et } z \neq -i
\end{aligned}$$

Si $Z_k - 1 \neq 0$ alors $z = -i \frac{Z_k + 1}{Z_k - 1}$ et dans ce cas on a bien $z \neq -i$ car

$$-i \frac{Z_k + 1}{Z_k - 1} = -i \iff 1 = -1.$$

Les solutions de (E) sont donc les $z = -i \frac{Z_k + 1}{Z_k - 1}$, $Z_k - 1 \neq 0$, $k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$.

Vérifions que les Z_k de l'ensemble $S = \left\{e^{i\left(\frac{\pi}{2n} + \frac{2k\pi}{n}\right)}, k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket\right\}$ sont différents de 1.

$$\begin{aligned}
 Z_k = 1 &\iff e^{i\left(\frac{\pi}{2n} + \frac{2k\pi}{n}\right)} = 1, \quad k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket \\
 &\iff \exists k' \in \mathbb{Z}, \quad \frac{\pi}{2n} + \frac{2k\pi}{n} = 0 + 2k'\pi, \quad k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket \\
 &\iff \exists k' \in \mathbb{Z}, \quad \frac{1}{2} + 2k = 2k'n, \quad k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket
 \end{aligned}$$

ce qui est impossible car k et k' sont des entiers. Ainsi, toutes les valeurs de S sont différentes de 1.

On en déduit que les racines de (E) sont les

$$z_k = -i \frac{e^{i\left(\frac{\pi}{2n} + \frac{2k\pi}{n}\right)} + 1}{e^{i\left(\frac{\pi}{2n} + \frac{2k\pi}{n}\right)} - 1}, \quad k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket.$$

Posons $\theta = \frac{\pi}{2n} + \frac{2k\pi}{n}$. z_k s'écrit alors

$$-i \frac{e^{i\theta} + 1}{e^{i\theta} - 1} = -i e^{i\frac{\theta}{2}} \frac{e^{i\frac{\theta}{2}} (e^{i\frac{\theta}{2}} + e^{-i\frac{\theta}{2}})}{e^{i\frac{\theta}{2}} (e^{i\frac{\theta}{2}} - e^{-i\frac{\theta}{2}})} = -i \frac{2 \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}{2i \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} = -\frac{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

Les solutions sont donc

$$z_k = -\frac{\cos\left(\frac{\pi}{4n} + \frac{k\pi}{n}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4n} + \frac{k\pi}{n}\right)} \text{ avec } k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket.$$