Contrôle : corps des complexes

1

On rappelle que pour tout nombres complexes z_1 et z_2, $\overline{z_1 \times z_2} = \overline{z_1} \times \overline{z_2}$.

1. Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\overline{z^n} = \overline{z}^n$.

2. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $z^n + \overline{z}^n$ est un réel.

3. Démontrer que pour tout entier naturel n, $(2+\mathrm{i})^{2n} + (3-4\mathrm{i})^n$ est réel.

2

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$z^2 - \overline{z} + 1 = 0.$$

3

À tout nombre complexe z, on associe le nombre $z' = \dfrac{(3+4\mathrm{i})\,z + 5\overline{z}}{6}$.

1. Montrer que pour tout z complexe, on a :

$$\frac{z'-z}{1+2\mathrm{i}} = \frac{z+\overline{z}}{6} + \mathrm{i}\frac{z-\overline{z}}{3}.$$

2. En déduire que $\dfrac{z'-z}{1+2\mathrm{i}}$ est un nombre réel.

4

On considère le polynôme P défini dans $\mathbb{C}$ par :

$$P(z) = z^4 + (-4-4\mathrm{i})\,z^3 + (-6+16\mathrm{i})\,z^2 + (12+24\mathrm{i})\,z - 48\mathrm{i}.$$

1. Calculer $P(-2)$ et en déduire une factorisation de P en un produit d'un polynôme du premier degré et d'un polynôme du troisième degré.

2. On considère le polynôme $Q(z) = z^3 - (6+4\mathrm{i})\,z^2 + (6+24\mathrm{i})\,z - 24\mathrm{i}$. Démontrer que $Q(z)$ admet une racine imaginaire pure que l'on déterminera.

3. En déduire l'ensemble des racines de P dans $\mathbb{C}$.

5 (bonus)

Pour tout nombre complexe z différent de $3\mathrm{i}-5$, on pose

$$f(z) = \frac{z-3+\mathrm{i}}{z+5-3\mathrm{i}}.$$

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $f(z) = -\overline{f\left(\overline{z}\right)}$.