

Contrôle : corps des complexes

1 correction

On rappelle que pour tout nombres complexes z_1 et z_2 , $\overline{z_1 \times z_2} = \overline{z_1} \times \overline{z_2}$.

- Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\overline{z^n} = \overline{z}^n$.
- En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $z^n + \overline{z}^n$ est un réel.
- Démontrer que pour tout entier naturel n , $(2+i)^{2n} + (3-4i)^n$ est réel.

2 correction

Résoudre dans \mathbb{C} l'équation :

$$z^2 - \overline{z} + 1 = 0.$$

3 correction

À tout nombre complexe z , on associe le nombre $z' = \frac{(3+4i)z + 5\overline{z}}{6}$.

- Montrer que pour tout z complexe, on a :

$$\frac{z' - z}{1+2i} = \frac{z + \overline{z}}{6} + i \frac{z - \overline{z}}{3}.$$

- En déduire que $\frac{z' - z}{1+2i}$ est un nombre réel.

4 correction

On considère le polynôme P défini dans \mathbb{C} par :

$$P(z) = z^4 + (-4-4i)z^3 + (-6+16i)z^2 + (12+24i)z - 48i.$$

- Calculer $P(-2)$ et en déduire une factorisation de P en un produit d'un polynôme du premier degré et d'un polynôme du troisième degré.
- On considère le polynôme $Q(z) = z^3 - (6+4i)z^2 + (6+24i)z - 24i$. Démontrer que $Q(z)$ admet une racine imaginaire pure que l'on déterminera.
- En déduire l'ensemble des racines de P dans \mathbb{C} .

5 correction (bonus)

Pour tout nombre complexe z différent de $3i-5$, on pose

$$f(z) = \frac{z-3+i}{z+5-3i}.$$

Résoudre dans \mathbb{C} l'équation $f(z) = -\overline{f(\overline{z})}$.

Correction

1 énoncé

1. Soit P_n la propriété : $\overline{z^n} = \overline{z}^n$.

□ *Initialisation* : $\overline{z^1} = \overline{z}$ et $\overline{z^1} = \overline{z}$ donc P_1 est vraie.

□ *Hérédité* : Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P_n \implies P_{n+1}$.
 $\overline{z^{n+1}} = \overline{z^n z} = \overline{z^n} \times \overline{z} = \overline{z}^n \times \overline{z} = \overline{z}^{n+1}$.

On a montré que P_n implique P_{n+1} .

□ *Conclusion* : Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, P_n est vraie.

2. $z^n + \overline{z}^n = z^n + \overline{z^n} \in \mathbb{R}$.

3.

$$\begin{aligned} (2+i)^{2n} + (3-4i)^n &= ((2+i)^2)^n + (3-4i)^n \\ &= (3+4i)^n + (3-4i)^n \\ &= \overline{3-4i}^n + (3-4i)^n \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

2 énoncé

On pose $z = a + bi$.

$$\begin{aligned} z^2 - \overline{z} + 1 = 0 &\iff (a+bi)^2 - (a-bi) + 1 = 0 \\ &\iff a^2 - a - b^2 + 1 + (2ab+b)i = 0 \\ &\iff \begin{cases} a^2 - a - b^2 + 1 = 0 \\ b(2a+1) = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} a^2 - a - b^2 + 1 = 0 \\ b = 0 \text{ ou } a = -\frac{1}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

□ Pour $b = 0$, l'équation $a^2 - a + 1 = 0$ ne possède pas de solution réelle.

□ Pour $a = -\frac{1}{2}$, $b = -\frac{\sqrt{7}}{2}$ ou $b = \frac{\sqrt{7}}{2}$.

L'ensemble des solutions est donc $\left\{ -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{7}}{2}i; -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{7}}{2}i \right\}$.

3 énoncé

1.

$$\begin{aligned} \frac{z' - z}{1 + 2i} &= \frac{(3+4i)z + 5\overline{z} - 6z}{6(1+2i)} \\ &= \frac{(-3+4i)z + 5\overline{z}}{6(1+2i)} \\ &= \frac{((-3+4i)z + 5\overline{z})(1-2i)}{6 \times 5} \\ &= \frac{(1+2i)z + (1-2i)\overline{z}}{6} \\ &= \frac{z + \overline{z}}{6} + i \frac{z - \overline{z}}{3} \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} \frac{z' - z}{1 + 2i} &= \frac{z + \overline{z}}{6} + i \frac{z - \overline{z}}{3} \\ &= \frac{2 \operatorname{Re}(z)}{6} - \frac{i \times 2 \operatorname{Im}(z) i}{3} \\ &= \frac{2 \operatorname{Re}(z)}{6} - \frac{2 \operatorname{Im}(z)}{3} \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

4

énoncé

1. On vérifie que $P(-2) = 0$. Par division de polynômes on obtient la factorisation :

$$P(z) = (z+2)(z^3 - (6+4i)z^2 + (6+24i)z - 24i).$$

2. $Q(bi) = 6b^2 - 24b + (-b^3 + 4b^2 + 6b - 24)$

$$Q(bi) = 0 \iff b(6b - 24) = 0 \text{ et } -b^3 + 4b^2 + 6b - 24 = 0.$$

$b = 4$ convient et donc $4i$ est solution.

3. Par division de Q par $z - 4i$ on obtient la factorisation :

$$Q(z) = (z - 4i)(z^2 - 6z + 6).$$

En résolvant l'équation $z^2 - 6z + 6 = 0$ on en déduit l'ensemble des solutions $P(z) = 0$:

$$\{-2; 4i; 3 - \sqrt{3}; 3 + \sqrt{3}\}.$$

5

énoncé

$$\begin{aligned} f(z) = -\overline{f(\bar{z})} &\iff \frac{z-3+i}{z+5-3i} + \frac{z-3-i}{z+5+3i} = 0 \\ &\iff \frac{2z^2 + 4z - 36}{(z+5-3i)(z+5+3i)} = 0 \\ &\iff z^2 + 2z - 18 = 0 \text{ et } z \in \mathbb{C} \setminus \{-5+3i; -5-3i\} \\ &\iff z \in \{-1 - \sqrt{19}; -1 + \sqrt{19}\}. \end{aligned}$$