Contrôle : congruences

1

Déterminer l'entier k tel que

1. $239 \equiv k\ (11)$ et $0 \leqslant k < 11$.

2. $-253 \equiv k\ (23)$ et $-23 \leqslant k < 0$.

3. $12\,560 \equiv k\ (33)$ et $105 \leqslant k < 138$.

2

Déterminer le reste de $4\,049^{8\,236}$ dans la division euclidienne par 7.

3

Démontrer que, pour tout entier naturel, $n^3 + 23n + 2\,016$ est multiple de 6. (La démonstration sera faite en utilisant les congruences).

4

Résoudre dans $\mathbb{Z}$ les équations suivantes :

1. $3x + 2 \equiv 7x - 48\ (6)$.

2. $7x + 2 \equiv 0\ (7)$.

3. $5x + 1 \equiv 2x + 3\ (5)$.

4. $4\,038^{973} x \equiv 2\,302^{873}\ (5)$.

5

On considère l'équation (E) : $6x^2 - 5y^2 = 7$ dont les inconnues x et y sont des entiers relatifs.

1. Montrer que si un couple $(x\,;y)$ est solution de (E) alors $x^2 \equiv 2\ (5)$.

2. Pour tout entier relatif a, quels sont les restes possibles de la division euclidienne de a^2 par 5 ?

3. Quel est l'ensemble des solutions de l'équation (E).

6 Bonus 1

Quel est le chiffre des unités de $23^{23^{23^{23}}}$?

7 Bonus 2

Pour n un entier naturel, $f(n)$ désigne la somme des chiffres de son écriture décimale. On pose $N = 4\,444^{4444}$. Déterminer $f\left(f\left(f(N)\right)\right)$.