Contrôle : complexes

1

Calculer les expressions suivantes et donner le résultat sous forme algébrique :

1. $(3+\mathrm{i})^2$
2. $\left(1+\mathrm{i}\sqrt{2}\right)^2$
3. $(1+2\mathrm{i})(-2-2\mathrm{i})$
4. $(7\mathrm{i}-3)(7-3\mathrm{i})$

2

Déterminer les conjugués des nombres complexes suivants :

1. $9+\mathrm{i}$
2. $5\mathrm{i}-2$
3. $\dfrac{3-\sqrt{7}}{7}\mathrm{i}$
4. $\sqrt{7}+\pi\mathrm{i}$

3

On rappelle que pour tout nombres complexes z_1 et z_2, $\overline{z_1 z_2}=\overline{z_1}\,\overline{z_2}$.

1. Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\overline{z^n}=\overline{z}^n$.
2. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $z^n+\overline{z}^n$ est un réel.
3. Démontrer que pour tout entier naturel n, $(2+\mathrm{i})^{2n}+(3-4\mathrm{i})^n$ est réel.

4

Résoudre les équations suivantes avec la méthode la mieux adaptée :

1. $\overline{z}-2\mathrm{i}z=3$
2. $z-\mathrm{i}=\overline{z}$
3. $\mathrm{i}\overline{z}=3z-2\mathrm{i}$
4. $2\mathrm{i}\overline{z}=\dfrac{\overline{z}-\mathrm{i}}{2}$
5. $\dfrac{z}{\overline{z}+1}=3$
6. $\dfrac{\overline{z}}{z-1}=2$

5

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on pose

$$P(z)=z^3-5z^2+9z-9.$$

1. Montrer que 3 est solution de $P(z)=0$.
2. En déduire une factorisation de $P(z)$.
3. Résoudre $P(z)=0$.

6

On définit une fonction f de $\mathbb{C}\setminus\{\mathrm{i}\}$ dans $\mathbb{C}$ par :

$$f(z)=\frac{z-1}{z-\mathrm{i}}.$$

1. Démontrer que 1 n'a aucun antécédent par f.
2. On pose $z=x+y\mathrm{i}$. Déterminer $\mathrm{Re}(z)$ et $\mathrm{Im}(z)$.
3. Déterminer l'ensemble des points $M(x,y)$ tels que $f(z)$ est réel.
4. Déterminer l'ensemble des points $M(x,y)$ tels que $f(z)$ soit imaginaire pur.

7 **(Bonus)**

On appelle ensemble des entiers de Gauss l'ensemble

$$\mathbb{Z}[\mathrm{i}]=\left\{a+b\mathrm{i},\ (a,b)\in\mathbb{Z}^2\right\}.$$

1. Montrer que la somme et la différence de deux entiers de Gauss sont des entiers de Gauss.
2. Montrer que le produit de deux entiers de Gauss est un entier de Gauss.
3. **(a)** Montrer que pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $(x,y)\neq(0,0)$, $\left|\dfrac{xy}{x^2+y^2}\right| \leqslant \dfrac{1}{2}$.

   (b) Déterminer les entiers de Gauss dont l'inverse est un entier de Gauss.