

Contrôle : complexes

1 correction

Calculer les expressions suivantes et donner le résultat sous forme algébrique :

- $(3+i)^2$
- $(1+i\sqrt{2})^2$
- $(1+2i)(-2-2i)$
- $(7i-3)(7-3i)$

2 correction

Déterminer les conjugués des nombres complexes suivants :

- $9+i$
- $5i-2$
- $\frac{3-\sqrt{7}}{7}i$
- $\sqrt{7}+\pi i$

3 correction

On rappelle que pour tout nombres complexes z_1 et z_2 , $\overline{z_1 \times z_2} = \overline{z_1} \times \overline{z_2}$.

- Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\overline{z^n} = \overline{z}^n$.
- En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $z^n + \overline{z}^n$ est un réel.
- Démontrer que pour tout entier naturel n , $(2+i)^{2n} + (3-4i)^n$ est réel.

4 correction

Résoudre les équations suivantes avec la méthode la mieux adaptée :

- $\bar{z} - 2iz = 3$
- $z - i = \bar{z}$
- $i\bar{z} = 3z - 2i$
- $2i\bar{z} = \frac{\bar{z}-i}{2}$
- $\frac{z}{\bar{z}+1} = 3$
- $\frac{\bar{z}}{z-1} = 2$

5 correction

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on pose

$$P(z) = z^3 - 5z^2 + 9z - 9.$$

- Montrer que 3 est solution de $P(z) = 0$.
- En déduire une factorisation de $P(z)$.
- Résoudre $P(z) = 0$.

6 correction

On définit une fonction f de $\mathbb{C} \setminus \{i\}$ dans \mathbb{C} par :

$$f(z) = \frac{z-1}{z-i}.$$

- Démontrer que 1 n'a aucun antécédent par f .
- On pose $z = x + yi$. Déterminer $\operatorname{Re}(f(z))$ et $\operatorname{Im}(f(z))$.
- Déterminer l'ensemble des points $M(x, y)$ tels que $f(z)$ est réel.
- Déterminer l'ensemble des points $M(x, y)$ tels que $f(z)$ soit imaginaire pur.

7 correction

On appelle ensemble des entiers de Gauss l'ensemble

$$\mathbb{Z}[i] = \{a + bi, (a, b) \in \mathbb{Z}^2\}.$$

- Montrer que la somme et la différence de deux entiers de Gauss sont des entiers de Gauss.
- Montrer que le produit de deux entiers de Gauss est un entier de Gauss.
- (a) Montrer que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $(x, y) \neq (0, 0)$, $\left| \frac{xy}{x^2 + y^2} \right| \leq \frac{1}{2}$.
(b) Déterminer les entiers de Gauss dont l'inverse est un entier de Gauss.

Correction

1 énoncé

- $(3+i)^2 = 8+6i$
- $(1+i\sqrt{2})^2 = -1+2i\sqrt{2}$
- $(1+2i)(-2-2i) = 2-6i$
- $(7i-3)(7-3i) = 58i$

2 énoncé

- $\overline{9+i} = 9-i$
- $\overline{5i-2} = -2-5i$
- $\overline{\frac{3-\sqrt{7}}{7}i} = -\frac{3-\sqrt{7}}{7}i$
- $\overline{\sqrt{7}+\pi i} = \sqrt{7}-\pi i$

3 énoncé

- Soit P_n la propriété : $\overline{z^n} = \overline{z}^n$.

□ *Initialisation* : $\overline{z^1} = \overline{z}$ et $\overline{z^1} = \overline{z}$ donc P_1 est vraie.

□ *Hérédité* : Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P_n \implies P_{n+1}$.

$$\overline{z^{n+1}} = \overline{z^n z} = \overline{z^n} \times \overline{z} = \overline{z}^n \times \overline{z} = \overline{z}^{n+1}.$$

On a montré que P_n implique P_{n+1} .

□ *Conclusion* : Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, P_n est vraie.

- $z^n + \overline{z}^n = z^n + \overline{z^n} \in \mathbb{R}$.

3.

$$\begin{aligned} (2+i)^{2n} + (3-4i)^n &= ((2+i)^2)^n + (3-4i)^n \\ &= (3+4i)^n + (3-4i)^n \\ &= \overline{3-4i}^n + (3-4i)^n \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

4 énoncé

- $\overline{z} - 2iz = 3 \iff z = -1 + 2i$
- $z - i = \overline{z} \iff \text{Im}(z) = \frac{1}{2}$
- $i\overline{z} = 3z - 2i \iff z = \frac{1}{4} + \frac{3}{4}i$
- $2i\overline{z} = \frac{\overline{z}-i}{2} \iff z = -\frac{4}{17} - \frac{i}{17}$
- $\frac{z}{\overline{z}+1} = 3 \iff z = -\frac{3}{2}$
- $\frac{\overline{z}}{z-1} = 2 \iff z = 2$

5 énoncé

- $P(3) = 0$
- $P(z) = (z-3)(z^2 - 2z + 3)$

3.

$$P(z) = 0 \iff z - 3 = 0 \text{ ou } z^2 - 2z + 3 = 0$$

On résout $(z^2 - 2z + 3) = 0$: $\Delta = -8 = (2i\sqrt{2})$, $z_1 = 1 - i\sqrt{2}$, $z_2 = 1 + i\sqrt{2}$. Ainsi

$$P(z) = 0 \iff z \in \{3, 1 - i\sqrt{2}, 1 + i\sqrt{2}\}.$$

6 énoncé

1.

$$\begin{aligned} f(z) = 1 &\iff \frac{z-1}{z-i} = 1 \\ &\iff z-1 = z-i \text{ et } z \neq i \\ &\iff 1 = i \text{ et } z \neq i \\ &\iff z \in \emptyset \end{aligned}$$

- $x + yi = i \iff (x, y) = (0, 1)$.

Soit $z = x + yi$, $(x, y) = (0, 1)$.

$$\begin{aligned} f(x + yi) &= \frac{x + yi - 1}{x + yi - i} \\ &= \frac{x - 1 + yi}{x + (y - 1)i} \\ &= \frac{(x - 1 + yi)(x - (y - 1)i)}{x^2 + (y - 1)^2} \\ &= \frac{x^2 + y^2 - x - y}{x^2 + (y - 1)^2} + \frac{x + y - 1}{x^2 + (y - 1)^2}i \\ &= \frac{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}}{x^2 + (y - 1)^2} + \frac{x + y - 1}{x^2 + (y - 1)^2}i \end{aligned}$$

3. $f(z)$ est réel si, et seulement si, $M(x, y)$ est un point de la droite d'équation $y = x$ (le point de coordonnées $(0, 1)$ n'est pas un point de cette droite).

4. $f(z)$ est un imaginaire pur si, et seulement si, $M(x, y)$ est un point du cercle de centre $\Omega\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ et de rayon $\frac{\sqrt{2}}{2}$ privé du point de coordonnées $(0, 1)$.

7

énoncé

1. Trivial

2. Trivial

3. (a) Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $(x, y) \neq (0, 0)$, $(|x| - |y|)^2 \geq 0 \iff \left| \frac{xy}{x^2 + y^2} \right| \leq \frac{1}{2}$.

(b) Soit $z = a + bi$ un entier de Gauss tel que $(a, b) \neq (0, 0)$.

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{a + bi} = \frac{a - bi}{a^2 + b^2} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2}i.$$

Si $\frac{1}{z}$ est un entier de Gauss alors $\frac{a}{a^2 + b^2} \in \mathbb{Z}$ et par conséquent $\frac{ab}{a^2 + b^2}$ aussi. Or, comme $\left| \frac{ab}{a^2 + b^2} \right| \leq \frac{1}{2}$, $\frac{ab}{a^2 + b^2} = 0$. On en déduit que $a = 0$ ou $b = 0$.

□ Si $a = 0$, $\frac{1}{z} = -\frac{1}{b}i$ et on en déduit que $b = 1$ ou $b = -1$.

□ Si $b = 0$ on obtient de la même manière $a = 1$ et $a = -1$.

Les inversibles sont donc à chercher parmi $I = \{-1, 1, -i, i\}$.

Réciproquement, on vérifie que tous les éléments de I sont inversibles.