

Contrôle : PGCD, Bezout, Gauss

1

Un astronome a observé au jour J_0 le corps céleste A, qui apparaît périodiquement tous les 105 jours. Six jours plus tard ($J_0 + 6$), il observe le corps B, dont la période d'apparition est de 81 jours. On appelle J_1 le jour de la prochaine apparition simultanée des deux objets aux yeux de l'astronome.

Le but de cet exercice est de déterminer la date de ce jour J_1 .

1. Soient u et v le nombre de périodes effectuées respectivement par A et B entre J_0 et J_1 . Montrer que le couple $(u; v)$ est solution de l'équation (E_1) :

$$35x - 27y = 2.$$

2. (a) Déterminer un couple d'entiers relatifs $(x_0; y_0)$ solution particulière de l'équation (E_2) :

$$35x - 27y = 1.$$

(b) En déduire une solution particulière $(u_0; v_0)$ de (E_1) .

(c) Déterminer toutes les solutions de l'équation (E_1) .

(d) Déterminer la solution $(u; v)$ permettant de déterminer J_1 .

3. (a) Combien de jours s'écouleront entre J_0 et J_1 ?

(b) Le jour J_0 était le mardi 7 décembre 1999, quelle est la date exacte du jour J_1 ? (L'année 2000 était bissextile.)

(c) Si l'astronome manque ce futur rendez-vous, combien de jours devra-t-il attendre jusqu'à la prochaine conjonction des deux astres ?

2

Soit a et b des entiers et m et n des entiers positifs. On considère le système

$$(S) \begin{cases} x \equiv a \pmod{m} \\ x \equiv b \pmod{n} \end{cases}$$

1. On suppose que $\text{PGCD}(m, n) \mid a - b$.

(a) L'équation $um + vn = a - b$ d'inconnue (u, v) possède-t-elle des solutions ? Pourquoi ?

(b) On note (u_0, v_0) un couple solution de l'équation précédente, donner une solution de (S) .

2. Réciproquement, on suppose que (S) possède des solutions. Montrer que $\text{PGCD}(m, n) \mid a - b$.

3 (bonus)

Soit $(a, b) \in (\mathbb{N}^*)^2$. Montrer que a et b sont premiers entre eux si et seulement si tout entier supérieur ou égal à $(a - 1)(b - 1)$ est de la forme $au + bv$ pour un couple $(u, v) \in \mathbb{N}^2$.