Contrôle : PGCD, Bezout, Gauss

1 correction

Un astronome a observé au jour J_0 le corps céleste A, qui apparaît périodiquement tous les 105 jours. Six jours plus tard ($J_0 + 6$), il observe le corps B, dont la période d'apparition est de 81 jours. On appelle J_1 le jour de la prochaine apparition simultanée des deux objets aux yeux de l'astronome.
Le but de cet exercice est de déterminer la date de ce jour J_1.

1. Soient u et v le nombre de périodes effectuées respectivement par A et B entre J_0 et J_1. Montrer que le couple $(u\,;\,v)$ est solution de l'équation (E_1) :

$35x - 27y = 2$.

2. (a) Déterminer un couple d'entiers relatifs $(x_0\,;\,y_0)$ solution particulière de l'équation (E_2) :

$$35x - 27y = 1.$$

(b) En déduire une solution particulière $(u_0\,;\,v_0)$ de (E_1).

(c) Déterminer toutes les solutions de l'équation (E_1).

(d) Déterminer la solution $(u\,;\,v)$ permettant de déterminer J_1.

3. (a) Combien de jours s'écouleront entre J_0 et J_1 ?

(b) Le jour J_0 était le mardi 7 décembre 1999, quelle est la date exacte du jour J_1 ? (L'année 2000 était bissextile.)

(c) Si l'astronome manque ce futur rendez-vous, combien de jours devrat-il attendre jusqu'à la prochaine conjonction des deux astres ?

2 correction

Soit a et b des entiers et m et n des entiers positifs. On considère le système

$$(S)\ \begin{cases} x \equiv a \ \ (m) \\ x \equiv b \ \ (n) \end{cases}$$

1. On suppose que $\text{PGCD}(m,n) \mid a-b$.

(a) L'équation $um + vn = a - b$ d'inconnue (u,v) possède-t-elle des solutions ? Pourquoi ?

(b) On note (u_0, v_0) un couple solution de l'équation précédente, donner une solution de (S).

2. Réciproquement, on suppose que (S) possède des solutions. Montrer que $\text{PGCD}(m,n) \mid a-b$.

3 correction

Soit $(a,b) \in (\mathbb{N}^*)^2$. Montrer que a et b sont premiers entre eux si et seulement si tout entier supérieur ou égal à $(a-1)(b-1)$ est de la forme $au+bv$ pour un couple $(u,v) \in \mathbb{N}^2$.

Correction

1 énoncé

1. La conjonction se produira au bout de $150u = 81v + 6$ jours. Or

$$150u = 81v + 6 \iff 35u - 27v = 2,$$

(u, v) est donc solution de $35x - 27y = 2$.

2. (a) $(-10\,;-13)$ convient.

(b) On multiplie par 2 : $(u_0\,;v_0) = (-20\,;-26)$.

(c)

$$\begin{aligned} 35u - 27v = 2 &\iff 35u - 27v - (35u_0 - 27v_0) = 0 \\ &\iff 35(u - u_0) = 27(v - v_0) \end{aligned}$$

(i) $27 \mid 35(u - u_0)$, comme $27 \wedge 35 = 1$, d'après le théorème de Gauss, $27 \mid u - u_0$. Il existe donc $k \in \mathbb{Z}$ tel que $u = u_0 + 27k$.

(ii) De la même manière on obtient qu'il existe $k' \in \mathbb{Z}$ tel que $v = v_0 + 35k'$.

Réciproquement, soit $(k, k') \in \mathbb{Z}^2$. $(u_0 + 27k, v_0 + 35k')$ est solution de E_1 si, et seulement si

$$35(u_0 + 27k) - 27(v_0 + 35k') = 2 \iff k = k'$$

On en déduit que l'ensemble des solutions est $\{(-20 + 27k\,, -26 + 35k),\ k \in \mathbb{Z}\}$.

(d) $u \geqslant 0$ et $v \geqslant 0$ si et seulement si $k \geqslant 1$. Pour $k = 1$ on obtient $u = 7$ et $v = 9$.

3. (a) $105 \times 7 = 735$ jours.

(b) $735 = 366 + 365 + 4$ et $7 + 4 = 11$ donc le 11 décembre 2001. Comme $735 \equiv 0\ (7)$ ce sera aussi un mardi.

(c) On a $k = 2$, $u = 34$ et $v = 44$. La deuxième conjonction se produit 3570 jours après J_0 et 2835 jours après J_1.

2 énoncé

1. (a) L'équation possède des solutions car $m \wedge n \mid a - b$.

(b) (u_0, v_0) est solution donc $u_0 m + v_0 n = a - b$ et par conséquent $a - u_0 m = b + v_0 n$. On pose $x = a - u_0 m = b + v_0 n$. x convient.

2. Si (S) possède des solutions, il existe $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $x = a + um = b + vn$. L'équation $um - vn = a - b$ possède donc des solutions, on en déduit que $m \wedge n \mid a - b$.

3 énoncé